

Løsning af differentialligning med Euler Cromer metoden

Givet differentialligningen:

$$y' = f(t, y)$$

Så viser det sig at en rimelig god numerisk løsningsmetode er at anvende Euler Cromer metoden.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Nu tilnærmer vi infinitesimalerne dy og dt med endelige ændringer Δy og Δt .

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f(t, y)$$

Nu isoleres y_{ny} fra $\Delta y = y_{ny} - y_{gl}$

$$\Delta y = f(t, y) \cdot \Delta t$$

$$y_{ny} - y_{gl} = f(t, y) \cdot \Delta t$$

$$y_{ny} = y_{gl} + f(t, y) \cdot \Delta t$$

Der er dog et lille problem, hvilken y anvendes i multivariabel funktionen f ?

Svaret er den nyeste vi kender, som er y_{gl} :

$$y_{ny} = y_{gl} + f(t, y_{gl}) \cdot \Delta t$$

Anvendelse af Euler Cromer til bevægelsesanalyse i fysik

Bevægelsesanalyse i fysik tager oftest udgangspunkt i Newtons 2. lov, som for 1 dimension kan skrives:

$$F_{res} = m \cdot a$$

Vi ved at

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Og det indses derfor at ovenstående er en differentialligning med v som ukendt funktion (svarer til y ovenfor) og t som uafhængig variabel.

$$a = \frac{1}{m} \cdot F_{res}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \cdot F_{res}$$

Anvendes Euler-Cromer får vi:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{m} \cdot F_{res}(v, s, t)$$

Hvor det nu vises eksplicit at den resulterende kraft kan afhænge af hastighed, v , position s og tid t .

$$\Delta v = \frac{1}{m} \cdot F_{res}(v, s, t) \cdot \Delta t$$

$$v_{ny} = v_{gl} + \frac{1}{m} \cdot F_{res}(v, s, t) \cdot \Delta t$$

Ved hjælp af ovenstående kan vi bestemme den øjeblikkelige v til bestemte tidspunkter.

Men ovennævnte kan ikke stå alene fordi vi også har brug for øjeblikspositionen, s . For at bestemme s anvendes differentialligningen:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Vi anvender nu Euler og omskriver den fra infinitesimal-størrelser (ds og dt) til endelige ændringer:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

$$s_{ny} - s_{gl} = v_{gl} \cdot \Delta t$$

$$s_{ny} = s_{gl} + v_{gl} \cdot \Delta t$$

Nu har vi to ligninger som gør at vi kan simulere, i små tidsstep, Δt , en bevægelse som påvirkes af ikke trivielle kræfter, nemlig:

$$s = s_1 + v_1 \cdot \Delta t$$

$$v = v_1 + \frac{1}{m} \cdot F_{res}(v_1, s) \cdot \Delta t$$

Bemærk at flere variable har ændret navne til simplere notation: $s_{gl} \rightarrow s_1$, $v_{gl} \rightarrow v_1$, $s_{ny} \rightarrow s$, og $v_{ny} \rightarrow v$.

For at simuleringen skal være god skal Δt vælges "tilpas" lille. Du kan eventuelt sætte en simulering op som du kender svaret på, dvs. som kan beregnes med færdig formel og sammenligne med simulering, skrue ned for Δt indtil de passer overens.

For at simuleringen skal kunne startes skal vi kende start-sted s_0 og start-hastighed v_0 , samt m og F_{res} . Først gang indsættes s_0 på s_1 's plads og v_0 på v_1 's plads. Dernæst itereres frem til bestemmelse af s og v over

Simulering af 2- eller 3-dimensionel bevægelse

For en bevægelse i 2 eller 3 dimensioner udvides ligninger til blot at inkludere vektorer.

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{v}_1 \cdot \Delta t$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \frac{1}{m} \cdot \vec{F}_{res} \cdot \Delta t$$

I 2 dimensioner svarer det til at der bliver 2 · 2 udtryk som der skal itereres over:

$$s_x = s_{x1} + v_{x1} \cdot \Delta t$$

$$s_y = s_{y1} + v_{y1} \cdot \Delta t$$

$$v_x = v_{x1} + \frac{1}{m} \cdot F_{xres} \cdot \Delta t$$

$$v_y = v_{y1} + \frac{1}{m} \cdot F_{yres} \cdot \Delta t$$

Og her er kraftvektoren:

$$\vec{F}_{res} = \begin{bmatrix} F_{xres} \\ F_{yres} \end{bmatrix}$$

Og det vil sige at F_{xres} er x-koordinaten af kraftvektoren og F_{yres} er y-koordinaten.